西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

一元积分学与微分方程

3D打印81李伟涛

2019年12月29日

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

01

一元积分学

CONTENS

一、定积分定义
（与极限结合）

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

二、定积分的几何意义

曲边梯形面积的代数和

三、定积分的性质

①线性性质 $\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$

②单调性 $f(x)\le g(x),\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

③对区间的可加性 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

④积分中值定理 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

一、微积分基本公式

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$$

二、微积分第一基本定理

$$\Phi(x)=\int_a^x f(x)dx$$

$f(x)$在区间上连续,则变上限积分可导,

且$\Phi'(x)=f(x)$

三、不定积分

1. $\int a\,\mathrm{d}x = ax + C$，其 C 为常数；
2. $\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$，其 a是常数 $a \neq -1$;
3. $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$;
4. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$，其 $a > 0$， $a \neq 1$;
5. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$;
6. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$;
7. $\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$
8. $\int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$
9. $\int \sec x\,\mathrm{d}x = \mathrm{ReArth}\tan\frac{x}{2} + C = \ln|\sec x + \tan x| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C$
10. $\int \csc x\,\mathrm{d}x = \mathrm{ReLn}\tan\frac{x}{2} + C = \ln|\csc x - \cot x| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C$
11. $\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + C$;
12. $\int \csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$;
13. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C$;
14. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$;
15. $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C$;
16. $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$;
17. $\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + C$;
18. $\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + C$;
19. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$;
20. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$;

一、换元积分法

①换元法则Ⅰ（凑微分法）

出现x^k部分，例如$x \Rightarrow d(\frac{x^2}{2})$，常与分部积分结合

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left(\int f(u)du\right)_{u=\varphi(x)}$$

②换元法则Ⅱ
（注意上下限、dx的变化）

$$\int f(x)dx = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)_{x=\varphi(t)}$$

带根号的一般是换元法则Ⅱ，
把根号换元

二、分部积分法

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$x^k, e^x, \ln x, \sin x, \cos x$, 反三角函数这几类函数组合时一般为分部积分法

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 & n\text{为奇数} \\ \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & n\text{为偶数} \end{cases}$$

一、在几何中的应用（曲线的旋转）

二、在物理中的应用

建立积分表达式 $dQ = f(x)dx$

一、无穷区间上的积分与无界函数的积分

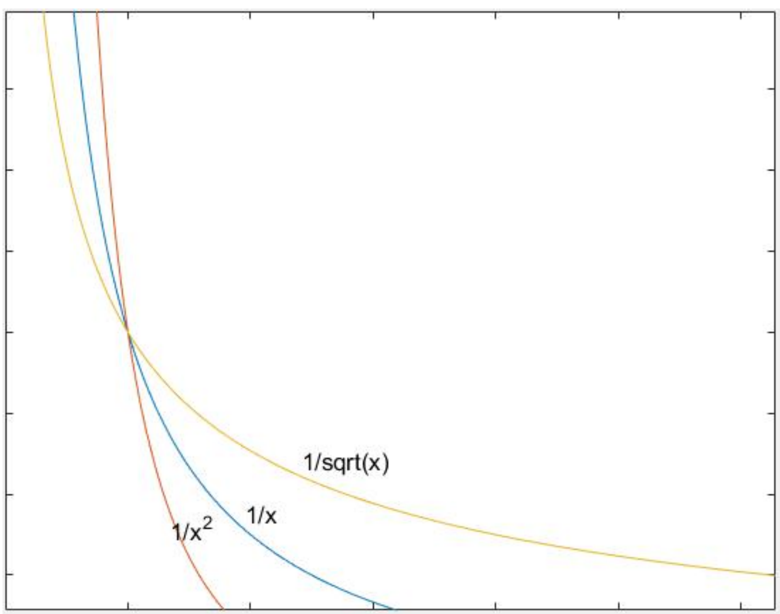
无穷积分：在区间$[a,+\infty)$上，$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

无界函数的积分：在区间(a, b]上，$f(x)$在a附近无界，

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

二、无穷区间上积分与无界函数的积分的审敛准则

比较准则



以y=1/x为分界线判断敛散性

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}=$ ___

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}e^{-\frac{1}{n}\ln(\frac{n!}{n^n})}=\lim_{n\to+\infty}e^{-\frac{1}{n}(\ln(\frac{1}{n})+\ln(\frac{2}{n})+\ldots+\ln(\frac{n}{n}))}$$

$$=e^{-\int_0^1\ln x\,dx}=e^{-(x\ln x-x)_0^1}=e$$

$$2.\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$$

例：$\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$

解法一：凑微分法

$$原式=\frac{1}{2}\int x^2\sqrt{4-x^2}\,d(x^2)=\frac{1}{2}\int[(4-x^2)-4]\sqrt{4-x^2}\,d(4-x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\int[(4-x^2)^{\frac{3}{2}}-(4-x^2)^{\frac{1}{2}}]\sqrt{4-x^2}\,d(4-x^2)=\frac{1}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

解法二：换元法

$$原式=\frac{1}{2}\int x^2\sqrt{4-x^2}\,d(x^2),令\sqrt{4-x^2}=t,则x^2=4-t^2,d(x^2)=-2tdt.$$

$$原式=\frac{1}{2}\int(4-t^2)t(-2t)dt=\int(t^4-4t^2)dt=\frac{1}{5}t^5-\frac{4}{3}t^3+C$$

解法三：另一种换元法

$$令x=2\sin t,则t=\arcsin\frac{x}{2}.$$

$$原式=\int(2\sin t)^3\cdot 2\cos t\cdot 2\cos tdt=32\int\sin^3 t\cos^2 tdt=-32\int\sin^2 t\cos^2 td\cos t=-32\int(1+-\cos^2 t)\cos^2 td\cos t$$

$$=-32(\frac{\cos^3 t}{3}-\frac{\cos^5 t}{5})+C=-\frac{4}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}}+C$$

3. 设隐函数y=y(x), 由方程

$y^2(x-y)=x^2$所确定，则$\int\frac{dx}{y^2}=$______

解：令 $y=tx$，则 $x=\frac{1}{t^2(1-t)}$，$y=\frac{1}{t(1-t)}$，$dx=\frac{-2+3t}{t^3(1-t)^2}dt$，

这样，$\int\frac{dx}{y^2}=\int\frac{-2+3t}{t}dt=3t-2\ln|t|+C=\frac{3y}{x}-2\ln|\frac{y}{x}|+C$.

4.(1)设n是正整数，计算$\int_0^{n\pi} x\left|\sin x\right|dx$.

(2)证明对任意正实数p，函数极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x t\left|\sin t\right|^p dt$存在.

(1)$\int_0^{n\pi} x\left|\sin x\right|dx \xrightarrow{t=n\pi-x} \int_0^{n\pi} n\pi\left|\sin t\right|dt - t\left|\sin t\right|dt$

$\therefore \int_0^{n\pi} x\left|\sin x\right|dx = \frac{n\pi}{2}\int_0^{n\pi}\left|\sin t\right|dt$, $\left|\sin t\right|$的周期为π

$\therefore \int_0^{n\pi} x\left|\sin x\right|dx = \frac{n^2\pi}{2}\int_0^{\pi}\left|\sin t\right|dt = n^2\pi$

(2)当$x\to+\infty$时，令$n\pi\le x\le(n+1)\pi, n\to+\infty$

$$\frac{\int_0^{n\pi} t\left|\sin t\right|^p dt}{(n+1)^2\pi^2}\le\frac{\int_0^{x} t\left|\sin t\right|^p dt}{x^2}\le\frac{\int_0^{(n+1)\pi} t\left|\sin t\right|^p dt}{n^2\pi^2}$$

同（1）处理方法，令x=nπ-t

$$\therefore \frac{\frac{n\pi}{2}\int_0^{n\pi}\left|\sin t\right|^p dt}{(n+1)^2\pi^2}\le\frac{\int_0^{x} t\left|\sin t\right|^p dt}{x^2}\le\frac{\frac{(n+1)\pi}{2}\int_0^{(n+1)\pi}\left|\sin t\right|^p dt}{n^2\pi^2}$$

$\left|\sin t\right|^p$周期为π

$$\frac{n^2}{(n+1)^2}\frac{\int_0^{\pi}\left|\sin t\right|^p dt}{2\pi}\le\frac{\int_0^{x} t\left|\sin t\right|^p dt}{x^2}\le\frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{\int_0^{\pi}\left|\sin t\right|^p dt}{2\pi}$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{x} t\left|\sin t\right|^p dt}{x^2}=\frac{\int_0^{\pi}\left|\sin t\right|^p dt}{2\pi}$$

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

02 微分方程

CONTENS

一、一阶线性微分方程

①齐次

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0\Rightarrow y=Ce^{-\int P(x)dx}$$

②非齐次

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)\Rightarrow y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$$

二、可用变量代换法求解的一阶微分方程

①齐次微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

②贝努利方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}$$

③其他换元

三、可降阶的高阶微分方程

①

$$y^{(n)} = f(x)$$

②不显含y

$$y'' = f(x, y') \Rightarrow$$

$$p = y', \frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

③不显含x

$$y'' = f(y, y') \Rightarrow$$

$$p = y', y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

一、高阶常系数线性齐次微分方程

二阶常系数: $x''+ax'+bx=0$

①特征方程
②求特征根
③写出通解

特征根 λ_1,λ_2	二阶常系数齐次方程的通解
两个不同实根 λ_1,λ_2	$x=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$
两个相等的实根 $\lambda_1=\lambda_2$	$x=e^{\lambda_1 t}(C_1t+C_2)$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$x=e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)$

p280

二、高阶常系数线性非齐次微分方程

二阶常系数: $x''+ax'+bx=F(t)$

① $F(t)=\varphi(t)e^{ut}$

② $F(t)=e^{ut}\varphi(t)\cos vt$或$e^{ut}\varphi(t)\sin vt$

p287

$F(t)$的类型	应设置特解 $x^*(t)$的形式	
m 次多项式 $\varphi(t)$	0 不是特征值	$x^*=Z(t)$
	0 是 k 重特征值	$x^*=t^kZ(t)$
$\varphi(t)e^{\mu t}$	μ 不是特征值	$x^*=Z(t)e^{\mu t}$
	μ 是 k 重特征值	$x^*=t^kZ(t)e^{\mu t}$
$\varphi(t)e^{\mu t}\cos\nu t$ 或 $\varphi(t)e^{\mu t}\sin\nu t$	$\mu+i\nu$ 不是特征值	$x^*=e^{\mu t}[Z_1(t)\cos\nu t+Z_2(t)\sin\nu t]$
	$\mu+i\nu$ 是 k 重特征值$\left(1\leqslant k\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]\right)$	$x^*=t^ke^{\mu t}[Z_1(t)\cos\nu t+Z_2(t)\sin\nu t]$

三、高阶变系数线性微分方程

Euler微分方程

$$t^n \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 t^{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n x = f(t)$$

$$t = e^{\tau}, \tau = \ln t,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{t}\frac{dx}{d\tau}$$

常系数线性齐次微分方程组的求解（课本p303-306）

①系数矩阵有n个线性无关的特征向量

②系数矩阵没有n个线性无关的特征向量

微分方程复习课本例题、习题即可

祝大家取得满意成绩！